UNIVERSITÀ ROMA TRE

Corso di laurea triennale in Fisica

PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI I - A.A. 2016-17

(prof. B. Palumbo)

Nota: i teoremi si intendono con dimostrazione, salvo indicazione contraria.

ARGOMENTI INTRODUTTIVI
Sistemi ipotetico - deduttivi. Cenni su una definizione costruttiva dell'insieme dei reali. Definizione assiomatica di $\mathbb{R}$. Assiomi di campo e loro conseguenze (leggi di cancellazione, unicità degli elementi neutri, unicità dell'opposto e dell'inverso, prodotto di fattori di cui uno è nullo, legge di annullamento del prodotto, inverso di un prodotto, ecc.). Assiomi dell'ordine. Definizione dei simboli di disuguaglianza. Intervalli. Rappresentazione dei numeri reali su una retta. Maggiorante, massimo estremo superiore di un insieme; minorante, minimo, estremo inferiore. Assioma di completezza (enunciato come assioma dell'estremo superiore) e conseguenze. Insiemi separati e contigui. Elemento di separazione. Postulato di Dedekind ed equivalenza con l'assioma dell'estremo superiore (senza dim.). Insiemi induttivi. Illimitatezza degli insiemi induttivi (senza dim.). Definizione dell'insieme $\mathbb{N}$. Definizione degli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Esistenza di numeri irrazionali (senza dim.). Cenni sulla scrittura decimale dei numeri reali. Chiusura di $\mathbb{N}$ rispetto all'addizione e alla moltiplicazione, e chiusura di $\mathbb{Z}$ anche rispetto alla sottrazione (senza dim.). Principio di induzione. Definizioni per induzione: potenza ad esponente naturale e intero, fattoriale, doppio fattoriale, sommatoria e produttoria. Dimostrazioni per induzione (disuguaglianza di Bernoulli e sue generalizzazioni, somma dei primi n quadrati ed altre formule riguardanti sommatorie e produttorie). Principio del buon ordinamento (senza dim.). Definizione di parte intera di un numero reale. Densità dei razionali nei reali. Densità degli irrazionali. Numeri algebrici e trascendenti. Calcolo combinatorio: disposizioni semplici, permutazioni, combinazioni semplici. Coefficienti binomiali e loro proprietà (legge dei termini complementari, legge di Stifel). Traslazione di indice in una sommatoria. Formula del binomio di Newton.

FUNZIONI ELEMENTARI
Concetto di funzione. Dominio, immagine, codominio, funzioni ricavabili da un'equazione in forma implicita. Funzione modulo e sue principali proprietà. Modulo di un prodotto e di un rapporto. Disuguaglianza triangolare per la somma e per la differenza. Funzione segno. Inversione di funzioni. Significato grafico dell'inversione. Alcuni esempi importanti di funzioni inverse, in particolare goniometriche inverse, iperboliche e loro inverse. Funzioni composte. Decomposizione di una funzione composta e determinazione del dominio.

LIMITI E CONTINUITÀ
Intorno di un punto, completo e bucato. Intorno circolare, completo e bucato. Illustrazione intuitiva del concetto di limite. Definizione di limite finito per x che tende ad a finito. Esempi di verifica e procedimenti per abbreviarla. Teorema dell'unicità del limite. Teorema delle operazioni sui limiti (dimostrata in dettaglio solo la somma). Funzione di Dirichlet e inesistenza del limite di tale funzione per $x \to a$. Definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo. Significato geometrico della continuità in intervalli. Continuità della somma, del prodotto, ecc. di funzioni continue. Continuità delle funzioni costanti e delle funzioni lineari. Continuità di funzioni polinomiali e razionali. Teorema della permanenza del segno (in entrambe le formulazioni). Continuità della funzione inversa (senza dim.). Limite di una funzione continua. Risoluzione di forme indeterminate 0/0 tramite la semplificazione di un fattore comune. Funzione sen$(1/x)$ ed inesistenza del limite per $x \to 0$. Il prodotto tra una funzione infinitesima e una limitata tende a 0; applicazione al limite di $x\cdot$sen$(1/x)$. Teorema del confronto. Limite per $x \to 0$ di senx / x, ed altri limiti notevoli ad esso riconducibili. Limite $\pm\infty$ per $x \to a$ finito. Limiti destri e sinistri, sia finiti sia infiniti. Calcolo di limiti parziali. Esempi di verifica. Teorema sul limite infinito della funzione reciproca. Teoremi sui limiti infiniti (somme e prodotti di limiti infiniti). Limite finito all'infinito e suo significato grafico. Asintoti orizzontali. Limiti infiniti all'infinito. Esempi e verifiche. Calcolo del limite all'infinito di un rapporto di polinomi ed altri esempi con funzioni irrazionali. Estensione del teorema del confronto per $\to +\infty$. Limiti per $x \to \pm\infty$ di funzioni irrazionali. Ulteriori esempi sulla continuità: continuità in un singolo punto, funzione di Thomae (continuità nei soli punti irrazionali e discontinuità nei razionali, senza dim.). Continuità in intervalli semiaperti e chiusi. Teorema dell'esistenza degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Estensioni del teorema dei valori intermedi. Esistenza ed unicità della radice n-esima di un numero positivo. Massimi e minimi assoluti di una funzione in un intervallo. Teorema di limitatezza delle funzioni continue in intervalli chiusi e limitati. Teorema di Weierstrass. Codominio di una funzione continua definita in un intervallo; caso particolare dell'intervallo chiuso e limitato. Teorema del segno costante ed applicazione alla risoluzione di disequazioni di tipo qualsiasi. Dimostrazione dell'esistenza di radici per equazioni non elementarmente risolubili. Definizione di uniforme continuità e relativi esempi. Teorema di Heine-Cantor, enunciato anche come teorema delle piccole oscillazioni (senza dim.). Ordine di infinito di una funzione per $x \to +\infty$, e relativi esempi di determinazione dell'ordine di infinito, anche da risolvere tramite razionalizzazioni. Cenno sull'ordine di infinitesimo di una funzione.

DERIVATE
Problema delle tangenti e problema della velocità istantanea. Definizione di derivata di una funzione in un punto. Esempi di calcolo della derivata con la definizione. Continuità delle funzioni derivabili. Derivata intesa come funzione (derivata in un

punto generico del dominio). Esempi (derivata di x^2, derivata di sen x e di altre funzioni elementari). Regole di derivazione: derivata di una funzione moltiplicata per una costante, derivata di una somma e di un prodotto. Derivata della funzione reciproca e di un rapporto. Esempi (derivata di una funzione razionale, derivata di tg x, tgh x, ecc.). Derivata di una funzione composta. Teorema di derivazione della funzione inversa (solo con giustificazione grafica). Esempi: calcolo della derivata di radice cubica di x e di arcsen x, arctg x, settsenh x, ecc. Rapporto incrementale a destra e derivata a destra. Rapporto incrementale a sinistra e derivata a sinistra. Significato geometrico. Definizione di massimo e minimo relativo, con relativi esempi. Teorema di Fermat (annullamento della derivata in un punto di estremo relativo). Teorema di Rolle: significato grafico ed esempi di applicabilità e non applicabilità. Teorema di Lagrange: significato grafico e cinematico. Teorema "scorciatoia" (calcolo della derivata destra o sinistra come limite della derivata anziché come limite del rapporto incrementale), ed applicazione allo studio di punti angolosi. Teorema di monotonia delle funzioni derivabili e teorema della derivata nulla. Ricerca di massimi e minimi relativi tramite la derivata. Flesso a tangente orizzontale. Esempi di studi di funzioni. Dimostrazione dell'esistenza (ed eventuale unicità) di radici di equazioni non elementarmente risolubili. Ricerca degli asintoti obliqui. Dimostrazione di disuguaglianze grazie alle proprietà di monotonia. Dimostrazione di identità tramite il teorema della derivata nulla. Studio dei punti di non derivabilità: punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente orizzontale. Studio di funzioni con termini in valore assoluto. Studio di funzioni con cuspidi e flessi a tangente verticale. Funzioni lipschitziane e relativi esempi. Relazione tra lipschitzianità e uniforme continuità. Derivata limitata implica lipschitzianità: esempi e controesempi. Derivata logaritmica ed esempi di applicazione, anche al caso della derivata di una funzione esponenziale a base variabile. Studi di funzioni goniometriche. Studio di funzione con discontinuità di diverse specie. Determinazione di parametri per imporre la continuità e l'eventuale derivabilità di una funzione. Rapporto incrementale e differenziale di una funzione. Definizione di differenziabilità. Equivalenza tra differenziabilità e derivabilità. Differenziale della funzione $f(x) = x$ e scrittura della derivata come rapporto di differenziali.

CALCOLO INTEGRALE

Problema geometrico del calcolo delle aree. Cenni sul metodo di esaustione. Suddivisione finita di un intervallo chiuso e limitato. Somme integrali inferiore e superiore. Disuguaglianza tra somma integrale inferiore e superiore anche relative a partizioni diverse (senza dim.). Definizione di integrale come elemento di separazione tra le somme integrali inferiori e superiori. Criterio di integrabilità (somme integrali inferiori e superiori costituiscono due insiemi contigui). Criterio per riconoscere che un numero è l'integrale di una funzione. Integrabilità delle funzioni continue. Esempi di calcolo di integrali con la sola definizione, e relative interpretazioni geometriche. Teorema di Archimede. Norma di una partizione. Somma integrale unica (costruita con punti arbitrari) e integrale definito come limite. Equivalenza delle due definizioni (senza dim.). Proprietà di monotonia (compreso il caso particolare in cui f è positiva in almeno un punto). Proprietà di linearità. Disuguaglianze tra funzioni ed integrali. Additività rispetto all'intervallo di integrazione (senza dim.). Estensioni del simbolo di integrale ai casi $a = b$ ed $a > b$. Additività generalizzata ad n intervalli. Spiegazione del simbolo di differenziale all'interno di un integrale; osservazioni critiche sull'uso dei simboli di Leibniz. Teorema della media. Definizione di funzione integrale. Osservazioni sul dominio di una funzione integrale. Funzione integrale nel caso che la funzione integranda presenti una discontinuità eliminabile. Primo teorema fondamentale del calcolo integrale. Concetto di primitiva. Teorema dell'unicità della primitiva. Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale ed esempi di applicazione con funzioni immediatamente integrabili. Simbolo di integrale indefinito. Alcuni integrali immediati ed altri casi ad essi riconducibili (integrazione di $f(ax)$). Esempi di calcolo di aree di figure delimitate da due o più curve. Altri esempi di integrali calcolabili con semplici trasformazioni della funzione integranda (uso delle formule di Werner ed altro). Teorema di integrazione per sostituzione (senza dim.). Esempi di integrali definiti e indefiniti da risolvere per sostituzione. Esempi di integrazione di funzioni irrazionali. Altri integrali particolari da utilizzare come immediati. Decomposizione in fratti semplici. Teorema della media pesata con esempi di applicazione. Cenno su integrali impropri (integrale di una funzione continua definitivamente di segno costante in $[a, +\infty)$). Integrali di funzioni razionali in seno e coseno. Integrazione per parti: dimostrazione della formula e vari esempi di applicazione. Espressione esplicita di una funzione integrale con l'integranda contenente termini in modulo. Studio delle proprietà di una funzione integrale non elementarmente calcolabile. Varie tecniche per razionalizzare integrali contenenti esponenziali e funzioni iperboliche, funzioni goniometriche, ecc. Integrazione di funzioni irrazionali con radici quadrate di trinomi di secondo grado (casi riconducibili ad integrali immediati e sostituzioni con funzioni goniometriche o iperboliche). Formule su integrali da dimostrare per induzione.

DEFINIZIONE RIGOROSA DELLE PRINCIPALI FUNZIONI TRASCENDENTI

Definizione della funzione logaritmo come integrale. Dominio e segno. Proprietà additiva. Codominio di log x e definizione del numero e. Proprietà additiva del logaritmo. Illimitatezza inferiore e superiore del logaritmo. Funzione esponenziale come inversa del logaritmo. Proprietà additiva dell'esponenziale e derivata dell'esponenziale. Definizione di potenza ad esponente reale (per la base e e per una base positiva qualsiasi). Comportamento di log x e di e^x per $x \to +\infty$. Cenno sulla definizione analitica delle funzioni goniometriche: arcotangente come integrale e sue principali proprietà. Definizione del numero π. Definizione della funzione tangente come il prolungamento per periodicità dell'inversa di arctg x. Definizione delle funzioni seno e coseno.

FORMULA DI TAYLOR

Definizione di polinomio di Taylor di ordine n. Espressione esplicita del polinomio di Taylor. Teorema che consente di ricavare polinomi di Taylor per derivazioni, integrazioni e sostituzioni (senza dim.). Esempi di calcolo di polinomi di Taylor. Formula di Taylor, con il resto espresso in forma integrale e nella forma di Lagrange. Esempi di calcolo approssimato di valori di funzioni, con maggiorazione dell'errore. Il resto nella formula di Taylor è un infinitesimo di ordine superiore ad n.

Teorema di Cauchy. Regola di De L'Hôpital (dimostrazione solo nel caso 0/0 per $x \to a^+$). Esempi di applicazioni e casi di non applicabilità. Simbolo "*o* piccolo": definizione e principali proprietà algebriche. Il polinomio di Taylor è l'unico per il quale il resto è $o((x - a)^n)$ (senza dimostrazione). Esempi di manipolazione di espressioni contenenti "*o* piccolo": polinomi di Taylor di prodotti ed altri ottenibili per sostituzioni a partire da formule di Taylor note. Calcolo di forme indeterminate 0/0 con la formula di Taylor. Formule di linearizzazione ed applicazioni alla risoluzione di forme indeterminate $+\infty - \infty$. Formula di Taylor di una funzione composta, anche nel caso in cui l'argomento non tende a 0. Altri casi di forme indeterminate risolubili con la regola di De L'Hôpital: 0^0, 1^∞, ∞^0.

NUMERI COMPLESSI
Definizione astratta dell'insieme $\mathbb{C}$ come insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Verifica delle proprietà di campo. Sottocampo $\mathbb{C}_0$ ed isomorfismo con il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Unità immaginaria. Rappresentazione di un numero complesso (x , y) nella forma algebrica $x + iy$. Coniugato di un numero complesso. Modulo di un numero complesso. Rappresentazione grafica dei numeri complessi (piano di Gauss). Cenno sulle coordinate polari. Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso. Argomento di un numero complesso. Argomento principale. Significato grafico del modulo e dell'argomento. Principali proprietà del modulo nel campo complesso (senza dim.). Prodotto e rapporto di numeri complessi scritti in forma trigonometrica. Formula di De Moivre. Radici nel campo complesso.

SUCCESSIONI E SERIE
Definizione di successione. Limiti di successioni, finiti e infiniti. Esempi di verifica. Cenni sui teoremi riguardanti i limiti di successioni (unicità, limite di una somma, teorema del confronto, ecc.). Limitatezza delle successioni convergenti. Successioni monotonem anche non strettamente. Proprietà delle successioni verificate "definitivamente". Regolarità delle successioni monotone (nei due casi di successioni limitate e illimitate). Sottosuccessioni. Identità tra limite di una successione e limite delle sue sottosuccessioni, ed applicazione alla dimostrazione di non esistenza di un limite. Teorema di Bolzano-Weierstrass (senza dim.). Il numero *e* come limite di successione. Definizione di serie numerica. Serie convergente e sua somma. Serie divergenti e indeterminate. Esempi di determinazione del carattere (e dell'eventuale somma) di una serie con la sola definizione. Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Teorema di linearità, anche nel caso in cui una delle serie sia divergente (senza dim.). Proprietà associativa per le serie, e relativi controesempi. Sostituzione o cancellazione di un numero finito di termini in una serie (senza dim.). Regolarità delle serie a termini non negativi. Serie telescopiche. Serie geometrica. Formula per la frazione generatrice di un numero periodico (dimostrata solo per il caso $\alpha = 0,\overline{c_1 c_2 \ldots c_p}$). Divergenza della serie armonica. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi o non negativi. Criterio del confronto. Criterio del rapporto. Criterio della radice (senza dim.). Criterio del confronto con un integrale. Serie armonica generalizzata. Criterio del confronto asintotico. Caso particolare del confronto con la serie armonica generalizzata (criterio dell'ordine di infinitesimo). Versione debole del criterio di confronto asintotico. Criteri di convergenza per le serie a termini di segno qualsiasi. Definizione di convergenza assoluta. Criterio della convergenza assoluta. Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni.

ALCUNE QUESTIONI DI TEORIA DEI NUMERI
Cenni su divisibilità in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$. Numeri primi e numeri composti. Teorema della fattorizzazione unica (senza dim.). Dimostrazioni elementari di irrazionalità tramite il teorema della fattorizzazione unica (radici di numeri interi, logaritmi di numeri interi in base intera). Irrazionalità del numero *e*.