Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
07 Giugno 2012

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)

Si dimostri che la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin\left[(n+\alpha+\frac{\beta}{n})\pi\right]$ converge solo se $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $\beta = 0$.

Esercizio 1.2 (15 punti)
Calcolare i seguenti limiti:

(i) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{x^{\sin x}-1}{\ln x}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$.

Esercizio 1.3 (15 punti)
(i) (5 punti) Trovare quali numeri complessi z risolvono l'equazione

$$z^2 + z\bar{z} - 2 + i = 0.$$

(ii) (10 punti) Sia z un numero complesso, diverso da 0; sia P il punto del piano complesso che sta sul raggio che congiunge 0 e z, e tale che

$$|P| = \frac{1}{|z|}.$$

Dimostrare che

$$P = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Esercizio 1.4 (15 punti)
(5 punti) Si consideri il sistema dinamico lineare planare $\dot{x} = Ax$, dove A è una matrice antisimmetrica. Si dimostri che l'origine è un punto d'equilibrio stabile.
(10 punti) Si consideri il sistema dinamico planare $\dot{x} = Ax - |x|^2 x$, con A come al punto (i) e $|\cdot|$ la norma euclidea in $\mathbb{R}^2$. Si dimostri che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e se ne stimi il bacino d'attrazione.

ESERCIZIO 1.5 (25 punti)
Sia λ un numero reale strettamente maggiore di 1 e sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda.$$

(i) (10 punti) Dimostrare che, preso $\bar{\lambda} \in (1, \lambda)$, si può trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq a_N \bar{\lambda}^{n-N} \quad \text{per} \quad n \geq N.$$

Usando il punto (i), calcolare i limiti seguenti:

(ii) (5 punti)
$$\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

(iii) (5 punti)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}.$$

(iv) (5 punti)
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^n.$$

ESERCIZIO 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

(i) (5 punti) Si dia la definizione di spazio metrico compatto per successioni.

(ii) (20 punti) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici compatti; sullo spazio prodotto

$$X \times Y = \{(x, y) \quad : \quad x \in X, \quad y \in Y\}$$

si definisca la distanza

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Dimostrare che lo spazio metrico $(X \times Y, D)$ è compatto.

GRUPPO 2 (Geometria)

ESERCIZIO 2.1 (15 punti)
Sia $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli definito nel seguente modo: se $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$

$$\varphi(f(X)) := (f(2), f(-3))$$

(i) Trovare il nucleo e l'immagine di φ.
(ii) Stabilire se l'anello quoziente $\mathbb{Q}[X]/\mathrm{Ker}(\varphi)$ è integro.
(iii) Applicare a φ il Teorema Fondamentale di omomorfismo.

ESERCIZIO 2.2 (15 punti)
Ridurre a forma canonica euclidea la seguente conica, studiarla e scrivere esplicitamente il cambiamento di riferimento usato:

$$3X^2 + 2XY + 3Y^2 + 10X - 2Y + 9 = 0.$$

ESERCIZIO 2.3 (15 punti)
Si considerino le matrici associate, rispetto alla base canonica, alle applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$\mathrm{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$f(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}, \text{ dove } \mathcal{H} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\}.$$

Determinare quali di queste matrici sono diagonalizzabili e determinare per esse una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 2.4 (15 punti)
Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ e determinarne esplicitamente le soluzioni, nei casi in cui il sistema sia compatibile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k, \\ x_1 - kx_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k. \end{cases}$$

Esercizio 2.5 (25 punti)
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottospazi

$$\mathcal{H} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{K} :=< (0,0,1,1), (1,1,0,0) > .$$

(i) Calcolare dimensione e una base di $\mathcal{H}$.
(ii) Calcolare dimensione e una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.
(iii) Stabilire se $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ è somma diretta di $\mathcal{H}$ e di $\mathcal{K}$.

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Enunciare il Teorema di riduzione a forma canonica di una conica nel piano euclideo e discutere i principali passi della sua dimostrazione: che cosa sono le forme canoniche; quali sono; come varia la risposta a seconda che il campo sia quello dei numeri reali o dei numeri complessi; perché è possibile la riduzione.