Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
07 Giugno 2013

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Si trovi una primitiva di

$$f(x) = \log(1 + x^4).$$

Esercizio 1.2 (15 punti)
Si calcoli

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{(x+2)^2} \mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.3 (15 punti)
Si calcoli

$$\lim_{x \to \mathrm{e}^+} (\log(x - \mathrm{e}))(\log x - 1),$$

dove e è il numero di Eulero e log è il logaritmo in base e.

Esercizio 1.4 (15 punti)
(i) (5 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si calcoli A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(ii) (5 punti) Utilizzando il risultato al punto (i), si calcoli $\exp(tA)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
(iii) (5 punti) Utilizzando il risultato al punto (ii), si determini la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x - y, \\ \dot{z} = z, \end{cases}$$

al variare del dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 1.5 (25 punti)

(i) (15 punti) Data le funzioni

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sin((x+y)^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

si discuta se si tratta di funzioni continue su $\mathbb{R}^2$.

(ii) (10 punti) Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f sull'insieme

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}.$$

ESERCIZIO 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

(i) (8 punti) Si enunci il teorema di inversione locale per le funzioni $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.

(ii) (8 punti) Si supponga che f sia di classe C^1 in un intorno di $x_0\in\mathbb{R}^n$ e che la matrice $f'(x_0)$ sia invertibile. Si ponga $y_0=f(x_0)$ e si chiami f^{-1} l'inversa locale di f. Si dimostri che

$$\det(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{\det f'(x_0)}.$$

(ii) (9 punti) Si consideri la funzione

$$f\colon\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \text{ e } -x<y<x\}\to\mathbb{R}^2, \qquad f(x,y)=(u,v),$$

con

$$u=x^2-y^2, \qquad v=\frac{y}{x}.$$

Si calcoli

$$\det(f^{-1})'(u,v)$$

per $u>0$, $v\in(-1,1)$.

GRUPPO 2 (Geometria)

ESERCIZIO 2.1 (15 punti)
Sia $\mathbb{Z}[i] = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ l'anello degli interi di Gauss e sia $I \subseteq \mathbb{Z}[i]$ l'ideale generato da $\alpha = -5 + 12i$.
(i) (5 punti) Si stabilisca se le classi modulo I degli elementi $\beta = -1 + 5i$ e $\gamma = 3 - 5i$ sono invertibili nell'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]/I$.
(ii) (5 punti) Si mostri che A ha un unico ideale proprio non nullo J.
(iii) (5 punti) Si stabilisca se A/J è un campo.

ESERCIZIO 2.2 (15 punti)
Siano A e B due matrici $n \times n$. Si dimostri che $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (con tr si denota la traccia, cioè la somma degli elementi diagonali di una matrice).

ESERCIZIO 2.3 (15 punti)
Sia V lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ a valori reali. Si dimostri che l'applicazione

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

definisce su V un prodotto scalare. Sia W il sottospazio definito dalle funzioni $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$; si trovi una base ortonormale per W.

ESERCIZIO 2.4 (15 punti)
Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ y \\ 3y \end{pmatrix}.$$

(i) Si scriva la matrice associata a f, rispetto alle basi canoniche.
(ii) Si determini dimensione e una base di $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Ker}(f)$.
(iii) Si trovino autovalori e una base per ciascun autospazio di f, precisando se f è diagonalizzabile.

<u>ESERCIZIO 2.5</u> (25 punti)

Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Si trovi il valore $h \in \mathbb{R}$ per cui la matrice ammette l'autovalore 3.

(ii) Posto $h = -2$, si dimostri che A è diagonalizzabile e si trovino una matrice diagonale D e il cambiamento di base che la realizzi.

<u>ESERCIZIO 2.6</u> (25 punti)

Dissertazione teorica.

La risoluzione dei sistemi lineari: si enunci il Teorema di Rouché-Capelli, si descrivano il metodo di Gauss e il metodo di Cramer e si applichi la teoria per classificare le possibili intersezioni tra due piani nello spazio affine tridimensionale.
