Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
11 Giugno 2014

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Sia $p \geq 1$; si consideri la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definita induttivamente da

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \log(1 + |a_n|^p).$$

(i) (2 punti) Si dimostri che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(ii) (3 punti) Si dimostri che la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è decrescente.
(iii) (3 punti) Si calcoli il limite di a_n per $n \to +\infty$.
(iv) (7 punti) Usando il criterio del rapporto, si dimostri che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Esercizio 1.2 (15 punti)
Si discuta quante volte è derivabile

$$f(x) = \big(x^3 + x|x|\big) \sin|x|$$

nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ e si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ al variare di $\alpha \in [0, \pi]$.

Esercizio 1.3 (15 punti)
Si consideri in $\mathbb{R}^2$ il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = -2y - 4x. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che è un sistema gradiente.
(ii) Si dimostri che il sistema ammette un unico punto d'equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(iii) Si studi qualitativamente il moto del sistema e si discuta, in particolare, se esistano moti illimitati.

Esercizio 1.4 (15 punti)
Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x\arctan x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1+2x^4}-1}.$$

Esercizio 1.5 (25 punti)
Si studi l'integrabilità e si calcoli l'integrale della funzione

$$f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}(1+x^2)}$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \quad : \quad y^4 \leq 4x, \quad x \leq 4y^4\}.$$

Esercizio 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
(i) (5 punti) Si enunci un teorema di passaggio al limite sotto segno d'integrale per l'integrale di Riemann. Si faccia lo stesso per un teorema di differenziazione sotto segno d'integrale.
(ii) (5 punti) Si dimostri che la funzione

$$f(t) = \frac{1}{t} + \int_0^1 \arctan(tx)\,\mathrm{d}x$$

è ben definita per tutti i $t > 0$.
(iii) (5 punti) Si dimostri che

$$\lim_{t\searrow 0} f(t) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi}{2}.$$

(iv) (5 punti) Differenziando sotto il segno d'integrale, si dimostri che la derivata di f è negativa per t sufficientemente vicino a zero e positiva per t in un intorno dell'infinito.
(v) (5 punti) Si deduca che f ha un minimo assoluto e si faccia un disegno qualitativo della funzione.

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Sia K un campo e sia $f(X,Y) \in K[X,Y]$ un polinomio non costante nelle indeterminate X, Y.
(i) Si mostri che $f(X,Y)$ è irriducibile su K se e soltanto se lo è sia su $K[Y]$ che su $K[X]$.
(ii) Si mostri che il polinomio $p(X,Y) := X^2 + Y^2 - 1$ è irriducibile su K.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Si indichi quale dei seguenti sottoinsiemi dello spazio dei polinomi di grado al più 3, $V = \mathbb{R}_3[X]$, ne è un sottospazio vettoriale e se ne calcoli la dimensione:

(i) $A := \{p \in V | p(0) = p(1) + 1\}$,

(ii) $B := \{p \in V | p(0) + p(1) = 2\}$,

(iii) $C := \{p \in V | p(0) + p(1) = 0\}$.

Esercizio 2.3 (15 punti)
Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U := \{a(0,1,1,0) + b(0,0,0,1) | a, b \in \mathbb{R}\},$$
$$V := \{(x,y,z,w) | x + y = 0, z = 2x\}.$$

Si determinino una base e la dimensione per $U, V, U \cap V, U + V$.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Si riduca in forma canonica la conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 + 4XY + 4Y^2 + 4Y = 0$$

e se ne descrivano le proprietà.

Esercizio 2.5 (25 punti)

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si consideri l'endomorfismo $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ determinato da A.

(i) Si determinino nucleo e immagine di f_A.

(ii) Si determinino autovalori e autovettori di f_A.

(iii) Si stabilisca se f_A è diagonalizzabile.

(iv) Si stabilisca se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f_A.

Esercizio 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si definisca un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Si descriva il metodo di Gram-Schmidt per individuare una base ortonormale di V rispetto a un prodotto scalare a partire da una qualsiasi base B di V. Si applichi tale procedura nel caso $V = \mathbb{R}_3[X]$, con prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

e si applichi il procedimento di Gram-Schmidt alla base

$$B = \{x^2, 1 - x, x + x^2, x^3 - x\}.$$