Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
14 Gennaio 2015

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)

(i) (2 punti) Si dimostri che $\sin\left[\left(n+\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi\right]=(-1)^n\sin\left[\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi\right]$.

(ii) (3 punti) Si dimostri che $\lim_{n\to+\infty}\sin\left[\left(n+\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi\right]=0$ se e solo se $\alpha\in\mathbb{Z}$.

(iii) (4 punti) Usando i punti (i) e (ii), si dimostri che la serie

$$\sum_{n\geq 1}\sin\left[\left(n+\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi\right]$$

non converge se $\alpha\notin\mathbb{Z}$.

(iv) (6 punti) Si dimostri che la serie del punto (iii) converge solo se $\alpha\in\mathbb{Z}$ e $\beta=0$.

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)

Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 e sia $\varphi(t,\bar{x})$ la soluzione dell'equazione $\dot{x}=f(x)$ con dato iniziale $\bar{x}$. Dato un insieme $A\subset\mathbb{R}^n$ poniamo

$$\varphi(t,A)=\bigcup_{x\in A}\varphi(t,x),\qquad \mathrm{Vol}(A)=\int_A \mathrm{d}x.$$

Diremo che φ conserva il volume se $\mathrm{Vol}(\varphi(t,A))=\mathrm{Vol}(A)$.

Si dimostri che se φ conserva il volume allora il sistema dinamico corrispondente non ammette punti d'equilibrio asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 1.3 (15 punti)

Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(x+\sqrt{1-x^2})}{\log(x+\sqrt{1+x^2})-\log(1+x)}.$$

ESERCIZIO 1.4 (15 punti)
(i) (5 punti) Si trovi quali numeri complessi z risolvono l'equazione $z^2 - z\bar{z} + z + \bar{z} - 2i = 0$.
(ii) (5 punti) Sia z un numero complesso, diverso da 0; sia P il punto del piano complesso che sta sul raggio che congiunge 0 e z, e tale che $|P| = \dfrac{1}{|z|}$. Si dimostri che $P = \dfrac{1}{\bar{z}}$.
(iii) (5 punti) Siano z e P come al punto (ii). Dato n, si trovi per quale z si ha $P^n = z$.

ESERCIZIO 1.5 (25 punti)
Si consideri l'insieme di $\mathbb{R}^3$ definito da $\Gamma = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, \quad x + y + z = 0\}$.
(i) (12 punti) Si dimostri che in ogni punto di Γ si possono esplicitare due variabili rispetto alla terza.
(ii) (13 punti) Si trovino i massimi e i minimi della funzione $f(x, y, z) = z$ ristretta a Γ.

ESERCIZIO 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
(i) (5 punti) Si ricordi la definizione di continuità per funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.
Sia $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisca

$$g(x) = \max_{y\in[0,x]} |f(y)|.$$

Si dimostrino i fatti seguenti.
(ii) (5 punti) La funzione g è monotona crescente e $g(x) \geq |f(x)| \qquad \forall x \geq 0$.
(iii) (5 punti) Per ogni $\delta \in (0, x)$ si ha $g(x) = \max\{\max_{y\in[0,x-\delta]} |f(y)|, \max_{y\in[x-\delta,x]} |f(y)|\}$.
(iv) (5 punti) Fissato $x > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$, si può trovare $\delta \in (0, x)$ tale che

$$\max_{y\in[x-\delta,x]} |f(y)| \leq g(x - \delta) + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \max_{y\in[x,x+\delta]} |f(y)| \leq g(x) + \varepsilon.$$

(v) (5 punti) Usando i punti precedenti, si dimostri che g è continua.

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)

Sia G un gruppo finito di ordine pari $n = 2k$.

(i) Si dimostri che G ha un elemento di ordine 2.

Supponiamo poi che k sia dispari.

(ii) Si dimostri che, se $g \in G$ ha ordine 2, l'applicazione $\mu_g : G \longrightarrow G, \; x \mapsto gx$ è una permutazione dispari sugli elementi di G.

(iii) Usando (ii) e il Teorema di Cayley, si mostri che il gruppo G ha un sottogruppo normale di ordine k.

Esercizio 2.2 (15 punti)

In $\mathbb{R}^2$ si definiscano le seguenti operazioni:

- somma: $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$,
- prodotto: $a(x, y) := (x|a|, y|a|)$.

Si stabilisca se $\mathbb{R}^2$ con tali operazioni sia o meno uno spazio vettoriale e perché.

Esercizio 2.3 (15 punti)

Si scrivano due matrici quadrate di ordine 3 a coefficienti reali, con polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2,$$

delle quali una sia diagonalizzabile e l'altra non lo sia.

Esercizio 2.4 (15 punti)

(i) Si studi la famiglia di coniche di equazione:

$$X^2 + 2XY + tY^2 + 4X - 6Y + t = 0,$$

al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, indicando in particolare i valori del parametro reale t per cui si hanno coniche degeneri, parabole, iperboli, ellissi (reali o immaginarie).

(ii) Si scrivano le equazioni canoniche euclidee per le coniche corrispondenti ai valori $t = 1, t = -1$.

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)
Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Sia S il sottoinsieme delle matrici simmetriche.
(i) Si dimostri che S è un sottospazio vettoriale di V;
(ii) si calcoli la dimensione di S;
(iii) si determinino uno spazio vettoriale W e una applicazione $f : V \to W$ in maniera tale che f sia suriettiva e che $\operatorname{Ker} f = S$.

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si dimostri che se A è una matrice $m \times n$ a coefficienti in un campo K la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe di A è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A. Se ne deduca il Teorema di nullità più rango per una applicazione lineare $\phi : V \to W$ tra due spazi vettoriali di dimensione finita.