Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
14 Gennaio 2016

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

<u>Istruzioni</u>

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Si dia per buono che $|\sin x| \leq 1$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $\{a_n\}$ definita da

$$a_n = \frac{(\sin n)\log(5 + e^{2n})}{n^\alpha}$$

(i) (5 punti) è limitata,
(ii) (10 punti) ammette limite.

Esercizio 1.2 (15 punti)
Si consideri l'equazione differenziale ordinaria in $\mathbb{R}$

$$\dot{x} = ax + \cos^2 t,$$

dove $a \in \mathbb{R}$.
(i) (10 punti) Si dimostri che per $a \neq 0$ esiste una sola soluzione periodica e la si calcoli esplicitamente.
(ii) (5 punti) Di discuta l'esistenza di soluzioni periodiche nel caso $a = 0$.

Esercizio 1.3 (15 punti)
Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - 81},$$

$$\int \mathrm{d}x \, \cos(\log x) \, .$$

Esercizio 1.4 (15 punti)

Si dica per quali valori del parametro reale t la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(t^n + n^{-3t}\right)$$

è convergente.

Esercizio 1.5 (25 punti)

(i) Si risolva il sistema di equazioni nelle due incognite complesse z e w:

$$\begin{cases} z^2 + w^2 = 0, \\ |z| = |w|, \\ z + w = 1. \end{cases}$$

(ii) Si interpreti geometricamente nel piano complesso ciascuna equazione del sistema.

Esercizio 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

(i) (5 punti) Si ricordino i principali prodotti notevoli.

Usando il punto (i), si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{1}{n}\right)^k$$

nei casi

(ii) (5 punti) $a > 1$,

(iii) (5 punti) $a < 1$,

(iv) (10 punti) $a = 1$.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>Esercizio 2.1</u> (15 punti)
Sia $G = \{e, x, y, z\}$ un gruppo di Klein (dove e è l'elemento neutro ed x, y, z hanno ordine 2). Si dimostri che il gruppo degli automorfismi di G è isomorfo al gruppo S_3 delle permutazioni su 3 elementi.

<u>Esercizio 2.2</u> (15 punti)
Siano U, V e W tre spazi vettoriali di dimensione finita e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Si dimostri che se esiste un'applicazione lineare $G : W \to U$ con $G \cdot F$ suriettiva, allora

$$\dim(\mathrm{Im}F) = \dim(U) + \dim(\mathrm{Im}F \cap \mathrm{Ker}G).$$

<u>Esercizio 2.3</u> (15 punti)
Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia inoltre W_k il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$(1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, -1), (2, 1, -1, -k).$$

(i) Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione di $U + W_k$ e di $U \cap W_k$.
(ii) Si determinino, se esistono, i vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ tali che $\langle \mathbf{v}, (1, 0, 0, 1) \rangle \subset W_k \cap U$.

<u>Esercizio 2.4</u> (15 punti)
Si riduca in forma canonica la conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$2X^2 - 3XY - 2Y^2 - 5X + 10Y - 5 = 0$$

e se ne descrivano le proprietà.

Esercizio 2.5 (25 punti)
(i) Si dimostri che, se A è una qualsiasi matrice quadrata, A e la sua trasposta A^t hanno gli stessi autovalori.
(ii) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

si determinino gli autospazi di A e di A^t e si verifichi se coincidono.

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
(i) Si dia la definizione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale di dimensione finita V e si dimostri che esiste sempre una base di V ortonormale.
(ii) Si determini una base ortonormale dello spazio S_3 dei polinomi di grado minore o uguale a 3 rispetto al prodotto scalare

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 (pq)\, \mathrm{d}t$$

per $p(t), q(t) \in S_3$.