Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
16 Febbraio 2017

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, A. Giuliani

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi.
(b) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(c) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)
Si studi la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2}{\pi}\text{artg}x\right) \left(\frac{2}{\pi}\text{artg}x\right)^n .$$

1) (5 punti) Si determini l'insieme dove la serie converge puntualmente.

2) (5 punti) Si determini l'insieme dove la serie converge uniformemente.

3) (5 punti) Si calcoli la somma della serie.

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione differenziale

$$x^{(3)} + 4\dot{x} = t + \sin 2t$$

corrispondente ai dati iniziali $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$ e $\ddot{x}(0) = 3$.

<u>Esercizio 1.3</u> (15 punti)
Sia S la superficie di $\mathbf{R}^3$ definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

e si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = e^{(x-2)^2+y^2+z^2}.$$

Calcolare

$$\inf_{(x,y,z)\in S} f(x, y, z) \qquad\qquad \sup_{(x,y,z)\in S} f(x, y, z).$$

<u>Esercizio 1.4</u> (15 punti)
Calcolare, se esistono, i limiti seguenti.

1) (5 punti)

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

2) (5 punti)

$$\lim_{(x,y)\to 0} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}.$$

3) (5 punti)

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

<u>Esercizio 1.5</u> (25 punti)

Si scriva l'equazione del piano T tangente nel punto $(1,1,1)$ alla superficie di equazione

$$x^3 + 2y^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0.$$

<u>Esercizio 1.6</u> (25 punti)

Dissertazione teorica.

1) (10 punti) Si definisca l'integrale improprio di Riemann.

2) (15 punti) Si determini se esiste finito

$$\int\int_E \frac{\sin^3(x)}{x^4+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y > x^2, x > 0\}.$$

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Sia $d \in \mathbb{Z}$ tale che $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$ e sia $A := \mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{f(\sqrt{d})\,;\; f(X) \in \mathbb{Z}[X[\}$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi calcolati in $\sqrt{d}$.
(a) Verificare che: $A = \{a + b\sqrt{d}\,;\; a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(b) Per ogni $x := a + b\sqrt{d} \in A$, poniamo $x^* := a - b\sqrt{d}$. Verificare che l'applicazione

$$\chi : A \longrightarrow A\,; \quad x \mapsto x^*$$

è un automorfismo di A.
(c) Dimostrare che ogni automorfismo di A è l'identità su $\mathbb{Z}$.
(d) Dimostrare che gli unici automorfismi di A sono l'identità su A e χ.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Sia A una matrice quadrata con polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \lambda^n$. Si dimostri che se A é simmetrica, allora A é la matrice nulla.

Esercizio 2.3 (15 punti)
In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale V generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,-1,1.-1), \mathbf{v}_3 = (3,1,3,1), \mathbf{v}_4 = (3,-1,3,-1), \mathbf{v}_5 = (6,0,6,0)$.

i) Si determini la dimensione di V.
ii) Si determini un sistema di equazioni lineari che definisca V.
iii) Si determini l'intersezione di V con $W = \{(x,y,z,w)|x+y=0\}$.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo é descritta dall'equazione

$$9X^2 + 4XY + 6Y^2 = 10$$

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)

Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia M_2 lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficient reali. Si consideri l'applicazione lineare

$$F : M_2 \longrightarrow M_2$$

definita da

$$F(X) := AX - XA$$

i) Si determini per ogni $h \in \mathbb{R}$ una base del Nucleo di F.

ii) Si stabilisca per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo F é diagonalizzabile.

iii) Per $h = 3$ si determini una base di M_2 formata da autovettori di F.

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Dimostrare che il rango per righe e il rango per colonne di una matrice coincidono e che una matrice quadrata A ha rango massimo se e solo se il sistema lineare $AX = 0$ ha solo la soluzione nulla.