Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
16 Febbraio 2018

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, A. Giuliani

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi.
(b) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(c) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)
Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

per $x \in \mathbb{R}$.
Si identifichi un integrale primo del moto (i.e., una grandezza conservata).
Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.
Si discuta la natura qualitativa del moto al variare dei dati iniziali. In particolare: si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$ ('curve di livello') e si discuta per quali dati iniziali il moto è limitato o illimitato.
Si esibisca un dato iniziale per cui il moto è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.
Si esibisca un dato iniziale per cui il moto è illimitato e si stabilisca se il tempo di fuga all'infinito è finito o infinito.

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)
Si studi la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2}{\pi}\mathrm{artg} x\right)\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{artg} x\right)^n .$$

1) (5 punti) Si determini l'insieme dove la serie converge puntualmente.
2) (5 punti) Si determini l'insieme dove la serie converge uniformemente.
3) (5 punti) Si calcoli la somma della serie.

<u>Esercizio 1.3</u> (15 punti)
Sia S la superficie di $\mathbf{R}^3$ definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

e si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = e^{(x-2)^2+y^2+z^2}.$$

Calcolare
$$\inf_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z) \qquad\qquad \sup_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z).$$

<u>Esercizio 1.4</u> (15 punti)
Calcolare, se esistono, i limiti seguenti.

1) (5 punti)
$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

2) (5 punti)
$$\lim_{(x,y)\to 0} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}.$$

3) (5 punti)
$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

<u>Esercizio 1.5</u> (25 punti)
Si scriva l'equazione del piano T tangente nel punto $(1,1,1)$ alla superficie di equazione
$$x^3+2y^2-7z^3+3y+1=0.$$

<u>Esercizio 1.6</u> (25 punti)
Dissertazione teorica.
1) (10 punti) Si definisca l'integrale improprio di Riemann.
2) (15 punti) Si determini se esiste finito
$$\int\int_E \frac{\sin^3(x)}{x^4+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
dove
$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad y>x^2, x>0\}.$$
Suggerimento. Si determini separatamente l'integrabilità in un intorno di 0 e di ∞.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>Esercizio 2.1</u> (15 punti)

Siano X e Y due indeterminate su $\mathbb{Q}$. Sia I l'ideale di $\mathbb{Q}[Y]$ generato dal polinomio $g(Y) := Y^2 + 4Y + 2$ e sia $\pi : \mathbb{Q}[Y] \to \frac{\mathbb{Q}[Y]}{I}$ la proiezione canonica.

(a) Dimostrare che $\frac{\mathbb{Q}[Y]}{I}$ è un campo.

(b) Dimostrare che l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[Y]; \quad f(X) \to f(Y+2)$$

è un isomorfismo di anelli e che l'applicazione

$$\psi := \pi \circ \varphi : \mathbb{Q}[X] \to \frac{\mathbb{Q}[Y]}{I}$$

è un omomorfismo suriettivo di anelli.

(c) Determinare il nucleo $Ker(\psi)$ e definire l'isomorfismo canonico

$$\frac{\mathbb{Q}[X]}{Ker(\psi)} \to \frac{\mathbb{Q}[Y]}{I}.$$

<u>Esercizio 2.2</u> (15 punti)

Si descrivano tutte le matrici A quadrate di ordine 2 con polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \lambda^2$. Quante di esse sono diagonalizzabili?

<u>Esercizio 2.3</u> (15 punti)

Si determinino tutti i sottospazi vettoriali supplementari di $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R} | x + y = 0\}$.

<u>Esercizio 2.4</u> (15 punti)

Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo é descritta dall'equazione

$$2X^2 + 4XY - Y^2 + 6Y - 8 = 0$$

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)
Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix}$$

Si determinino $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ in maniera tale che l'endomorfismo

$$f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

che ha A per matrice associata rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ verifichi:
i) $\mathrm{Ker}(f_A) \neq (0)$
ii) $f_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$
L'endomorfismo f_A cosí determinato é diagonalizzabile?

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Dimostrare che se una matrice quadrata di ordine n ha n autovalori distinti allora é diagonalizzabile. Si dimostri che una matrice quadrata ha due autovlori reali e coincidenti se e solo se vale $4det(A) = (Tr(A))^2$.