Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
17 Gennaio 2013

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)

Trovare una funzione $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ che sia continua e suriettiva.

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)

Calcolare

$$\sup_{n\geq 1}(n2^n - n!).$$

ESERCIZIO 1.3 (15 punti)

Calcolare i seguenti limiti:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\sin(x^2+2x^4)} - \mathrm{e}^{\sin x^2}}{x\,(1-\cos x)\log(1+x)}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\mathrm{e}^x - \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{x}{\sin x} - 1\right)$.

ESERCIZIO 1.4 (15 punti)

Si consideri il sistema gradiente unidimensionale

$$\dot{x} = -V'(x), \qquad V'(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x),$$

dove

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4.$$

(i) (5 punti) Determinare i punti d'equilibrio e studiarne la stabilità.

(ii) (5 punti) Determinare eventuali insiemi invarianti.

(iii) (5 punti) Calcolare esplicitamente la soluzione al variare dei dati iniziali.

Esercizio 1.5 (25 punti)
Sia $B(0,1)$ la palla unità di $\mathbb{R}^n$, con coordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$; indichiamo con $||x||$ la norma euclidea di x. Poniamo

$$\omega = \int_{B(0,1)} x_1^2 \mathrm{d}x.$$

Sia M una matrice $n \times n$ e sia M^t la sua trasposta. Dimostrare che

$$\int_{B(0,1)} ||Mx||^2 \mathrm{d}x = \omega \, \mathrm{tr}(M^t M)$$

nei seguenti casi:
(i) (10 punti) M è diagonale.
(ii) (10 punti) M è diagonalizzabile.
[*Suggerimento.* Potrebbe essere utile dimostrare che, se AMA^{-1} è uguale alla matrice diagonale D, allora $\int_{B(0,1)} ||AMA^{-}1x||^2 \mathrm{d}x$ è uguale a $\int_{DB(0,1)} ||y||^2 \mathrm{d}y \cdot (\det M)^{-1}$ che a sua volta è uguale a $\int_{B(0,1)} ||Dz||^2 \mathrm{d}z$.]
(iii) (5 punti) M è una matrice qualunque.

Esercizio 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
(i) (10 punti) Sia A una matrice $n \times n$ dimostrare che lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$\dot{y}(x) = Ay(x)$$

ha dimensione n.
(ii) (5 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \qquad (*)$$

e la si scriva come sistema del primo ordine.
(iii) (5 punti) Scrivere la soluzione generale dell'equazione $(*)$.
(iv) (5 punti) Stabilire se esistono soluzioni $y(x)$ di $(*)$ tali che

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0.$$

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)

(i) (5 punti) Siano G un gruppo moltiplicativo e $H \subseteq G$ un suo sottogruppo di indice 2. Mostrare che, per ogni $g \in G$, $g^2 \in H$.

(ii) (5 punti) Sia poi $X \subseteq S_n$ l'insieme dei 3-cicli. Mostrare che l'applicazione:

$$X \longrightarrow X; \quad \alpha \mapsto \alpha^2$$

è una biiezione.

(iii) (5 punti) Dedurre dai punti precedenti che il sottogruppo alterno A_4 di S_4 non ha sottogruppi di ordine 6.

Esercizio 2.2 (15 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica, è associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Trovato il valore di h per cui f non è iniettivo,

(i) determinare $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$;

(ii) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k) \in \mathrm{Im} f$.

Esercizio 2.3 (15 punti)

Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & 0 \\ 2-i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di autovettori.

Esercizio 2.4 (15 punti)

Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 - 4Y^2 - 4X + 8Y - 1 = 0.$$

Esercizio 2.5 (25 punti)

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} h-1 & h & 1-2h & h-1 \\ h & 1 & -1-h & h \\ h & 1 & -1-h & h \\ 1 & 1-h & h-2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

(i) Determinare i valori di h per cui $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$,

(ii) Nel caso $h = 0$ determinare gli autospazi di f.

(iii) A è diagonalizzabile?

Esercizio 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si definisca il prodotto scalare in uno spazio vettoriale e si dimostri che in uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare esiste sempre una base ortogonale. Data la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ con $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 1, 2)$, si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.