Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
17 Gennaio 2014

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

<u>Istruzioni</u>

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Si determinare l'ordine d'infinitesimo per $x \to 0$ delle funzioni seguenti:

$$\left(\frac{x^4 + x^5}{x - \sin x}\right)^{1/2},$$

$$a \sin^2 x - \sin(ax^2), \qquad a \neq 0,$$

$$\log(1+x) - \mathrm{e} \log\log(\mathrm{e} + x),$$

dove e è il numero di Eulero e il logaritmo è in base e.

Esercizio 1.2 (15 punti)
Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Esercizio 1.3 (15 punti)
Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}.$$

Esercizio 1.4 (15 punti)
Si consideri in $\mathbb{R}$ l'equazione differenziale

$$\dddot{x} + \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 1.$$

(i) Si dimostri che la soluzione con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)) = (1, 4, -4)$ è periodica e se ne calcoli il periodo.
(ii) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale al variare del dato iniziale.

<u>ESERCIZIO 1.5</u> (25 punti)
(i) (10 punti) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x_0, y_0) = 0$ e si consideri il luogo di punti

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x, y) = 0\}.$$

Si enunci un teorema che garantisca che L, in un intorno sufficientemente piccolo di (x_0, y_0), sia il grafico di una funzione $y(x)$ di classe C^1 e tale che $y(x_0) = y_0$.
(ii) (15 punti) Si supponga anche che f sia di classe C^2; si dimostri che la funzione $y(x)$ è due volte differenziabile e che

$$y''(x_0) = \frac{-1}{(\partial_y f(x_0, y_0))^3} \cdot \Big(\partial_{xx} f(x_0, y_0) \cdot (\partial_y f(x_0, y_0))^2$$

$$- 2\partial_{xy} f(x_0, y_0) \cdot \partial_x f(x_0, y_0) \cdot \partial_y f(x_0, y_0) + \partial_{yy} f(x_0, y_0) \cdot (\partial_x f(x_0, y_0))^2\Big).$$

<u>ESERCIZIO 1.6</u> (25 punti)
Dissertazione teorica.
(i) (10 punti) Si enunci il teorema del cambiamento di variabile negli integrali multipli.
(ii) (15 punti) Per $a, b > 0$ si consideri il seguente integrale:

$$I(a, b) = \int_{D_a} \frac{1}{(xy)^b} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 0 \leq y \leq e^{-ax} x\}.$$

Si determini per quali valori di $a, b > 0$ $I(a, b)$ è finito e si dimostri che, per tali valori, si ha

$$I(a, b) = \frac{1}{(1 - b)(a(1 - b))^{2-2b}} \cdot \int_0^{+\infty} u^{1-2b} e^{-u} \, \mathrm{d}u.$$

Si chiarisca bene quali teoremi si stanno usando.

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Per ogni polinomio

$$f(X) := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

a coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, si indichi con

$$f'(X) := \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$$

il polinomio derivato. Si consideri l'applicazione

$$\Psi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), \quad f(X) \mapsto \begin{pmatrix} f(0) & 0 \\ f'(0) & f(0) \end{pmatrix}.$$

(i) Si verifichi che Ψ è un omomorfismo di anelli.
(ii) Si determini nucleo e immagine di Ψ.
(iii) Applicando il Teorema di Omomorfismo, si mostri che $\mathrm{Im}(\Psi)$ non è un dominio di integrità.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Sia $M_n(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali. Si considerino i sottospazi $\mathcal{S} := \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A = A^t\}$ e $\mathcal{A} := \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A = -A^t\}$, dove A^t indica la trasposta di A. Si dimostri che $M_n(\mathbb{R})$ è somma diretta di essi: $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Esercizio 2.3 (15 punti)
Sia V lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ a valori reali. Si dimostri che l'applicazione

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

definisce su V un prodotto scalare. Sia W il sottospazio definito dalle funzioni $f(t) = 1 - t$ e $g(t) = t^2 + t$; si trovi una base ortonormale per W.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Si riduca in forma canonica la conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 - 2XY - Y^2 + 2Y + 1 = 0$$

e se ne descrivano le proprietà.

Esercizio 2.5 (25 punti)
Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ una sua base. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow V$ definita ponendo

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := (x + hy + kz)\mathbf{v} + (x + 2y)\mathbf{w} + (2x + y - z)\mathbf{u},$$

con $h, k \in \mathbb{R}$, e si dia per buono che f è lineare.
(i) Si trovino i valori di h, k per i quali f è biettiva.
(ii) Per i valori di h, k per i quali f non è biettiva, si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Diagonalizzazione di endomorfismi: si definisca la diagonalizzazione di un endomorfismo $f : V \to V$ dove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K. Si diano condizioni necessarie e sufficienti per la diagonalizzazione di f, si diano esempi di endomorfismi non diagonalizzabili e classi di endomorfismi diagonalizzabili. Si dimostri che se $\dim(V) = n$ e se f ha n autovalori distinti allora f è diagonalizzabile.