Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
17 Giugno 2016

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)
Si determini per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log n} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^n$$

converge.

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)
Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_3 + x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3 - x_1. \end{cases}$$

(i) (10 punti) Si trovi la soluzione con condizioni iniziali $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ e $x_3(0) = c$, al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$.
(ii) (5 punti) Si dimostri che gli unici valori di a, b, c per i quali le soluzioni si mantengono limitate corrispondono ai punti d'equilibrio del sistema. Se ne discuta la stabilità.

ESERCIZIO 1.3 (15 punti)
La funzione

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(3x^2 + 5y^2)}{(3x^2 + 5y^2)^2}$$

non è definita nell'origine. È possibile definirla nell'origine in modo tale che diventi una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$? Si spieghino tutti i passaggi.

ESERCIZIO 1.4 (15 punti)
Sia B la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2. Si verifichi che risulta

$$\int\int_B x^2(1 + x^2 y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{15\pi}{4}.$$

Esercizio 1.5 (25 punti)

(i) (10 punti) Si enunci il teorema della funzione implicita.

Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme dei punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

(ii) (4 punti) Si dimostri che in un intorno di ogni punto di C diverso da $(0, 0, \pm 2)$ e $(2, 0, 0)$, C è il grafico di una funzione C^1 $(x(z), y(z))$.

(iii) (4 punti) Si dimostri che in un intorno di ogni punto di C diverso da $(0, 0, \pm 2)$ e $(2, 0, 0)$, C è il grafico di una funzione C^1 $(z(x), y(x))$.

(iv) (4 punti) Si dimostri che in un intorno di $(0, 0, 2)$ (e anche in un intorno di $(0, 0, -2)$) C è il grafico di una funzione C^1 $(x(y), z(y))$.

(v) (3 punti) Si disegni una figura di C e si spieghi perché il teorema della funzione implicita non vale in $(2, 0, 0)$.

Esercizio 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

(i) (10 punti) Si dia la definizione di derivabilità per funzioni di più variabili.

(ii) (5 punti) Sia $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, e si definisca $l(x) = h(||x||)$. Usando il fatto che l è pari, si dimostri che se l è differenziabile nell'origine, allora tutte le sue derivate parziali sono nulle.

(iii) (5 punti) Si dimostri che, se $h'(0) = 0$, allora f è differenziabile nell'origine.

Suggerimento. Basta usare la definizione di derivata.

(iv) (5 punti) Si dimostri che, se l è derivabile nell'origine, allora $h'(0) = 0$.

Suggerimento. Provare a restringere l agli assi coordinati.

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)

Sia $\varphi\colon \mathbb{Z}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $\varphi(x) = n$ se $n \geq 0$ è tale che 3^n divide x e 3^{n+1} non divide x.

Sia poi $v\colon \mathbb{Q}\setminus\{0\} \to \mathbb{Z}$ definita da $v(\frac{x}{y}) = \varphi(x) - \varphi(y)$ e poniamo

$$A = \{\alpha \in \mathbb{Q} : \alpha \neq 0, v(\alpha) \geq 0\} \cup \{0\}.$$

(i) Si verifichi che

$$v(\alpha+\beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}\,; \quad v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta).$$

(ii) Si verifichi che A è un sottoanello unitario di $\mathbb{Q}$.

(iii) Si determinino gli elementi invertibili di A.

(iv) Si mostri che $3A$ è l'unico ideale massimale di A.

Esercizio 2.2 (15 punti)

Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U := \{(x,y,z)|x+y+z=0\}, \qquad V := \{(x,y,z)|x+y=z=0\},$$

si stabilisca quale delle seguenti affermazioni è vera, giustificando la risposta:

(i) $U \cap V = \emptyset$.

(ii) $U + V = \mathbb{R}^3$.

(iii) $U \cup V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

(iv) $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.3 (15 punti)

Sia $W =< A, B, C >$ il sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Si riduca in forma canonica la conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$2X^2 + 4XY + 5Y^2 + 2x - 2Y + 1 = 0$$

e se ne descrivano le proprietà.

Esercizio 2.5 (25 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile e per tali valori si determini una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori.

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si dimostri il teorema di nullità più rango per un'applicazione lineare

$$f : V \longrightarrow W$$

e se ne deduca che un'applicazione lineare f è un isomorfismo se e solo se V e W hanno la stessa dimensione e f è iniettiva o suriettiva.