Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
18 Gennaio 2012

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)

Dire per quali valori del parametro reale t la serie

$$\sum_{n\geq 1}(t^n + n^{-3t})$$

è convergente.

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)

Dato $\alpha \geq 0$, si consideri la successione definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + \alpha_n}. \end{cases}$$

(i) (4 punti) Dimostrare che, se $\alpha < 2$, allora $a_n < 2$ e $a_{n+1} > a_n$ per tutti gli n.

(ii) (4 punti) Dimostrare che, se $\alpha > 2$, allora $a_n > 2$ e $a_{n+1} < a_n$ per tutti gli n.

(iii) (7 punti) Dimostrare che, per ogni $\alpha \geq 0$, $a_n \to 2$.

<u>Esercizio 1.3</u> (15 punti)

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + x = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}, \\ x(1) = 0, \\ \dot{x}(1) = 0. \end{cases}$$

<u>Esercizio 1.4</u> (15 punti)

Calcolare i seguenti integrali definiti:

(i) (4 punti) $$\int_1^9 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(ii) (3 punti) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x,$$

(iii) (4 punti) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

(iv) (4 punti) $$\int_0^1 \frac{x^2+\sqrt{x}+x^{3/2}}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.5 (25 punti)

(i) (2 punti) Cosa vuol dire che una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua?

(ii) (5 punti) Usando la definizione di continuità del punto (i), si dimostri che, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $f(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{Q}$, allora $f(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sia ora $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ una funzione continua tale che

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(iii) (5 punti) Dimostrare che $f(0) = 1$.

(iv) (4 punti) Dimostrare che $f(1) > 0$.

(v) (3 punti) Per il punto precedente, $f(1) = e^c$ per un $c \in \mathbb{R}$. Dimostrare che, per $p \in \mathbb{Z}$, $f(p) = e^{pc}$.

(vi) (3 punti) Dimostrare che, per $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, $f(p/q) = e^{\frac{cp}{q}}$.

(vii) (3 punti) Usando la continuità di f, dimostrare che $f(x) = e^{cx}$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

(i) (8 punti) Si enunci un teorema sulla moltiplicazione delle serie, ovvero si dia una condizione per cui

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} c_n\right) \qquad \text{con} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

e se ne dia la dimostrazione.

Si indichi con $\binom{a}{b}$ il coefficiente binomiale, e si fissi un intero positivo n.

(ii) (7 punti) Si dimostri che la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{k} z^k$ ha raggio di convergenza 1.

(iii) (10 punti) Si dia per buona la formula $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+k}{k}$. Si dimostri che

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{k} x^k.$$

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Sia $\mathbb{F}_p$ il campo con p elementi e sia

$$f_a(X) = X^p - X + a \in \mathbb{F}_p[X]$$

dove $a \neq 0$. Dimostrare che:
(i) $f_a(X)$ non ha radici in $\mathbb{F}_p$;
(ii) se α è una radice di $f_a(X)$ (in un opportuno ampliamento K di $\mathbb{F}_p$), tutte e sole le radici di $f_a(X)$ sono $\alpha + k$, $k \in \mathbb{F}_p$;
(iii) $f_a(X)$ è irriducibile su $\mathbb{F}_p$.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica, è associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Trovato il valore di h per cui f non è iniettivo,
(i) determinare $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$;
(ii) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k) \in \mathrm{Im} f$.

Esercizio 2.3 (15 punti)
Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & 0 \\ 2-i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di autovettori.

ESERCIZIO 2.4 (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 - 4Y^2 - 4X + 8Y - 1 = 0.$$

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)
Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} h-1 & h & 1-2h & h-1 \\ h & 1 & -1-h & h \\ h & 1 & -1-h & h \\ 1 & 1-h & h-2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.
(i) Determinare i valori di h per cui $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$,
(ii) Nel caso $h = 0$ determinare gli autospazi di f.
(iii) A è diagonalizzabile?

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si definisca il prodotto scalare in uno spazio vettoriale e si dimostri che in uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare esiste sempre una base ortogonale. Data la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ con $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 1, 2)$, si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.