Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
19 Giugno 2015

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)

Si determini per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ converge.

Esercizio 1.2 (15 punti)

(1) (3 punti) Per $a \in (0,1)$, si dimostri che la successione definita per ricorrenza da

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n^2$$

tende a zero.

(2) (5 punti) Si utilizzi il risultato del punto (1) per dimostrare che, se $a \in (0,1)$, allora la successione definita da

$$\begin{cases} y_0 = a, \\ y_{n+1} = \max\left\{\dfrac{1}{4}, y_n^2\right\} \end{cases}$$

tende a $1/4$.

(3) (3 punti) Si dimostri che, ponendo $a = 1$ nel punto (2), la successione $\{y_n\}$ tende a 1.

(4) (4 punti) Si dimostri che, se $a > 1$ nel punto (2), allora $y_n \to +\infty$.

Esercizio 1.3 (15 punti)

Sia P un punto sulla superficie della sfera tridimensionale S di raggio R. Si dimostri che

$$\int_{S_R} \frac{\mathrm{d}x}{d(x,P)} = \frac{4}{3}\pi R^2,$$

dove $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R\}$ e $d(x,P)$ è la distanza euclidea tra il punto di coordinate x e il punto P.

Esercizio 1.4 (15 punti)
Si trovi la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_3, \end{cases}$$

con condizioni iniziali $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$.

Esercizio 1.5 (25 punti)
Sia (X, d) uno spazio metrico. Dato un insieme $A \subset X$ e $x \in X$, si definisca la distanza del punto x dall'insieme A come

$$D(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

(1) (7 punti) Si dimostri che, per ogni coppia di punti $x, y \in X$,

$$D(y, A) \leq D(x, A) + d(x, y).$$

(2) (6 punti) Usando il punto (1), si dimostri che, per A fissato, la funzione $x \mapsto D(x, A)$ è continua.
(3) (5 punti) Si dimostri che, se C è compatto, allora l'estremo inferiore nella definizione di $D(x, C)$ è un minimo.
(4) (7 punti) Si supponga ora $X = \mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$. Si dimostri che se C è chiuso, allora l'estremo inferiore nella definizione di $D(x, C)$ è un minimo.

Esercizio 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Per funzioni di una variabile, si definisca (15 punti) e si dimostri (10 punti) la formula di Taylor con il resto di Lagrange.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>Esercizio 2.1</u> (15 punti)

Sia $\varphi : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{C}, \cdot)$ l'applicazione che associa ad ogni numero razionale x il numero complesso $e^{i2\pi x}$.

(1) Si verifichi che φ è un omomorfismo di gruppi e si determinino nucleo ed immagine di φ.

(2) Sia $p \geq 3$ un numero primo fissato. Si deduca da (1) che l'insieme U_p delle radici dell'unità di ordine uguale a p^n, $n \geq 0$, è un gruppo ed è isomorfo al gruppo quoziente $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$, dove $\mathbb{Z}_{(p)}$ è il sottogruppo additivo di $\mathbb{Q}$ formato dai numeri razionali del tipo a/p^n, con $a \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$.

<u>Esercizio 2.2</u> (15 punti)

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare. Si dimostri che

$$W := \{u \in V | (f \cdot f)(u) = u\}$$

è un sottospazio vettoriale di V. Se $V = \mathbb{R}^3$ e se $f(x, y, z) = (2x + y, x - z, z)$, si trovino la dimensione e una base di W.

<u>Esercizio 2.3</u> (15 punti)

Si trovi un sistema lineare minimo il cui insieme delle soluzioni rappresenti ciascuno dei seguenti sottospazi lineari di $\mathbb{R}^4$:

(i) $U := \{a(0, 1, 1, 0) + b(0, 1, -1, 0) | a, b \in \mathbb{R}\}$,

(ii) $V := \{a(1, 2, 3, 0) + b(1, 1, 1, 0) | a, b \in \mathbb{R}\}$,

(iii) $U + V$ e $U \cap V$.

<u>Esercizio 2.4</u> (15 punti)

Si riduca in forma canonica la conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 + 2XY + x + 2Y - 2 = 0$$

e se ne descrivano le proprietà.

Esercizio 2.5 (25 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

si determini, se esiste, una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale. Si determini inoltre, se esistono, valori dei parametri $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$$

sia simile alla matrice A.

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si dimostri che il rango per righe e il rango per colonne di una matrice coincidono e che una matrice quadrata A ha rango massimo se e solo se il sistema lineare $AX = 0$ ha solo la soluzione nulla.