Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
20 Settembre 2013

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Si determini il carattere della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}.$$

Esercizio 1.2 (15 punti)
Si calcoli il limite seguente

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right).$$

Esercizio 1.3 (15 punti)
Si calcoli

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^2 \sqrt{2-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.4 (15 punti)
Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x\,(1-y)\,, \\ \dot{y} = -y\,(1-x)\,. \end{cases}$$

(i) (5 punti) Si determinino i punti d'equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(ii) (5 punti) Si dia una stima dei bacini d'attrazione degli eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabile.
(iii) (5 punti) Si individuino eventuali insiemi invarianti e si discuta qualitativamente il moto nel piano.

Esercizio 1.5 (25 punti)
Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right) \mathrm{d}x + \frac{x}{x+y}\mathrm{d}y$$

definita su

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x+y>0\}.$$

Si consideri la mappa

$$\phi \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix},$$

che porta Ω in

$$\Omega' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad u>0\}.$$

(i) (12 punti) Si trovi il pull-back di ω tramite ϕ.
(ii) (13 punti) Si riconosca che ω è esatta e se ne calcoli una primitiva.
Suggerimento. Si può cercare di indovinare la primitiva di ω o quella del suo pull-back.

Esercizio 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
(i) (8 punti) Si enunci il teorema di inversione locale per le funzioni $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Si consideri ora $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una mappa di classe C^1 tale che, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, esistano $\rho > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

In altre parole, $f'(x,y)$ è sempre una rotodilatazione.
Sia (x_0,y_0) un punto dove $f'(x_0,y_0) \neq 0$.
(ii) (8 punti) Si dimostri che f è invertibile in un intorno di (x_0,y_0).
(iii) (9 punti) Si ponga $(w_0,z_0) = f(x_0,y_0)$; si dimostri che $(f^{-1})'(w_0,z_0)$ ha la forma $(*)$.

GRUPPO 2 (Geometria)

ESERCIZIO 2.1 (15 punti)
Sia $m \geq 2$ e si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_m, \quad f(X) \mapsto \overline{f(1)}.$$

(i) Si verifichi che φ è un omomorfismo di anelli.
(ii) Si determinino nucleo e immagine di φ.

ESERCIZIO 2.2 (15 punti)
Si dimostri che se A è una matrice quadrata di ordine 3 allora A e la sua trasposta A^t hanno gli stessi autovalori. Si generalizzi al caso in cui A abbia ordine n.

ESERCIZIO 2.3 (15 punti)
Nello spazio $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado al più tre, si considerino i polinomi:

1. $p_1(T) = T - (h+1)T^2$,
2. $p_2(T) = T + h$,
3. $p_3 = T - T^3$,
4. $p_4 = 4T$.

Si determinino i valori di h per cui

$$V = \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$$

e si determinino per tali valori le coordinate del polinomio

$$q = 1 + T + T^2 + T^3$$

rispetto alla base $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

ESERCIZIO 2.4 (15 punti)
Si riduca in forma canonica e si descrivano le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 - 2Y^2 - 2XY + 1 = 0.$$

Esercizio 2.5 (25 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica, è associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$. Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva,

(i) si determini l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ di f;

(ii) si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k) \in \mathrm{Im}(f)$;

(iii) si determini il nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ di f;

(iv) si verifichi che $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \emptyset$;

(v) esistono dei vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = (3, 2, -2)$?

Esercizio 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Diagonalizzazione di endomorfismi: si definisca la diagonalizzazione di un endomorfismo $f \colon V \to V$, dove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K. Si diano condizioni necessarie e sufficienti per la diagonalizzazione di f, si diano esempi di endomorfismi non diagonalizzabili e classi di endomorfismi diagonalizzabili. Si dimostri che se $\dim(V) = n$ e se f ha n autovalori distinti allora f è diagonalizzabile.