Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
21 Settembre 2016

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)
Sia $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successione di numeri non negativi. Si dimostri che

$$\sum_{n\geq 1} a_n 2^n < +\infty \qquad \text{se e solo se} \qquad \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{j=1}^{n} 2^j < +\infty.$$

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)
(5 punti) (i) Si consideri la successione

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Si dimostri che la successione a_n è monotona crescente. [**Suggerimento.** Si confrontino direttamente due termini successivi, scrivendo la somma per esteso.]
(ii) (5 punti) Si dimostri che $a_n \leq 1\ \forall n \geq 1$. [**Suggerimento.** Sono n termini, ciascuno più piccolo di...]
(iii) (5 punti) Si deduca dai punti (i) e (ii) che $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, con $a \in (0,1]$.

<u>Esercizio 1.3</u> (15 punti)
Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione differenziale in $\mathbb{R}$

$$\dot{x} = x - x^3.$$

Si calcolino i punti d'equilibrio del sistema, se ne discuta la stabilità e si dimostri che tutte le soluzioni tendono a due di esse, con l'eccezione di un unico dato iniziale.

<u>Esercizio 1.4</u> (15 punti)
Sia P un punto sulla superficie della sfera tridimensionale di raggio R. Si dimostri che

$$\frac{1}{|S_R|}\int_{S_R} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{d(\mathbf{x},P)} = \frac{1}{R}, \qquad |S_R| = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

dove $S_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq R\}$ e $d(\mathbf{x},P)$ è la distanza tra il punto di coordinate $\mathbf{x}$ e P.

Esercizio 1.5 (25 punti)

Si indichi con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ il coefficiente binomiale.

(ii) (10 punti) Si dimostri che la serie di potenze

$$\sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} z^k$$

ha raggio di convergenza 1.

(ii) (15 punti) Si dia per buona la formula $\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} n+j-1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$. Si dimostri che

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} x^k.$$

Suggerimento. Si dimostri la formula usando il principio d'induzione e il fatto che

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{(1-x)^n} \cdot \frac{1}{(1-x)}.$$

Esercizio 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

(i) (5 punti) Si enunci il teorema di Weiestrass sui massimi e minimi delle funzioni.

(ii) (5 punti) Si enunci il teorema di Weierstass generalizzato.

Sia (X,d) uno spazio metrico. Dato un insieme $A \subset X$ e $x \in X$, si definisca la distanza del punto x dall'insieme A come

$$D(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a).$$

(iii) (5 punti) Si dimostri che

$$D(y,A) \leq D(x,A) + d(x,y).$$

(iv) (2 punti) Usando il punto (i), si dimostri che, per A fissato, la funzione

$$: x \to D(x,A).$$

è continua.

(v) (3 punti) Si dimostri che, se C è compatto, allora l'inf nella definizione di $D(x,C)$ è un minimo.

(vi) (5 punti) Si supponga ora $X = \mathbb{R}$ e $d(x,y) = |x-y|$. Si dimostri che se C è chiuso, allora l'inf nella definizione di $D(x,C)$ è un minimo.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>Esercizio 2.1</u> (15 punti)
Sia $\xi = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$ e sia $\mathbb{Z}[\xi] = \{f(\xi)\,;\ f(X) \in \mathbb{Z}[X]\}$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi calcolati in ξ.
(i) Si verifichi che $\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi\,;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(ii) Si determini il gruppo G degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\xi]$.
(iii) Si verifichi che G è ciclico di ordine 6.

<u>Esercizio 2.2</u> (15 punti)
Sia A una matrice quadrata invertibile. Si determini la relazione esistente tra gli autovalori di A e gli autovalori di A^{-1}.

<u>Esercizio 2.3</u> (15 punti)
In $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ si consideri l'endomorfismo f dato da

$$f(2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{3e_1} + \mathbf{6e_2} - \mathbf{3e_3},$$

$$\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{2e_3}, \mathbf{3e_1} - \mathbf{e_2} - \mathbf{2e_3} \in \mathrm{Ker(f)}.$$

(i) Si trovi la matrice di f rispetto alla base canonica.
(ii) Si determinino $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ e le rispettive basi.
i(ii) Si verichi che $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

<u>Esercizio 2.4</u> (15 punti)
Si riduca in forma canonica la conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 - 2XY - Y^2 + 2Y + 1 = 0$$

e se ne descrivano le proprietà.

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)

Si considerino le seguenti matrici ad elementi reali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Si stabilsca se tali matrici sono diagonalizzabili, e in caso affermativo si determini una matrice diagonale simile alla data e la relativa matrice del cambiamento di base.
(ii) Si stabilsca se A e B sono associate ad uno stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.
(iii) Si determinino gli autospazi di A e di A^t e si verifichi se coincidono.

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si dia la definizione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale di dimensione finita V e si dimostri che esiste sempre una base di V ortonormale. Si determini una base ortonormale dello spazio S_3 dei polinomi di grado minore o uguale a 3 rispetto al prodotto scalare

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(t)\, q(t)\, \mathrm{d}t$$

per $p(t), q(t) \in S_3$.