Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
22 Settembre 2017

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, A. Giuliani

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi.
(b) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(c) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)

1) (8 punti) Determinare se la funzione seguente è differenziabile nell'origine.

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y sex > 0 \\ x + ye^{-x^2} sex \leq 0 \end{cases}$$

2) (7 punti) Calcolare, se esiste, il limite seguente.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Esercizio 1.2 (15 punti)

Si dia per buono che $|\sin x| \leq 1$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $\{a_n\}$ definita da

$$a_n = \frac{(\sin n)\log(5+e^{2n})}{n^\alpha}$$

1) (7 punti) è limitata, e

2) (8 punti) ammette limite.

Esercizio 1.3 (15 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$f(x+1) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x + \frac{1}{2}).$$

Suggerimento. Cosiderare la funzione $g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

Esercizio 1.4 (15 punti)

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = \frac{1-x}{1+x}$$

per $x \neq -1$.

(i)Si identifichi un integrale primo del moto (i.e., una grandezza conservata). (ii) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità. (iii) Si discuta la natura qualitativa del moto al variare dei dati iniziali. In particolare: si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$ ('curve di livello') e si discuta per quali dati iniziali il moto è limitato o illimitato. Si discuta se esistono dati iniziali che generano moti periodici e, in caso, se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

Esercizio 1.5 (25 punti)

Si studi l'integrabilità e si calcoli l'integrale della funzione

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}(1+x^2)}$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) \quad : \quad y^4 \leq 4x, \quad x \leq 4y^4, \quad y > 0\}.$$

Si noti che si tratta di un integrale improprio.

Esercizio 1.6 (25 punti)

1) (10 punti) Si enunci il teorema di cambiamento di coordinate negli integrali multipli.

2) (15 punti) Calcolare

$$\int_D \frac{e^{3x+2y}}{(2x+3y)\log(2x+3y)} dxdy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad -1 \leq 2y + 3x \leq 0e2 \leq 2x + 3y \leq e\}.$$

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)

Siano A, B anelli commutativi unitari tali che $A \subset B$ e sia $Q \subset B$ un ideale primo. Verificare che:

(a) $P := Q \cap A$ è un ideale primo di A;

(b) L'applicazione

$$f : \frac{A}{P} \to \frac{B}{Q}; \quad a + P \mapsto a + Q$$

è ben definita ed è un omomorfismo iniettivo di anelli.

Siano poi $A := \mathbb{Z}$ e $B := \mathbb{Z}[i]$.

(c) Verificare che l'ideale $Q := \langle 1 + i \rangle \subset B$ è primo e determinare $P := Q \cap A$.

(d) Verificare che in questo caso f è un isomorfismo.

Esercizio 2.2 (15 punti)

Determinare le matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali tali che $A^2 = 0$. Esse formano un sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le matrici?

Esercizio 2.3 (15 punti)

Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo é descritta dall'equazione

$$X^2 - 2XY - Y^2 + 2Y + 1 = 0.$$

Esercizio 2.4 (15 punti)

Data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ A è diagonalizzabile e per tali valori diagonalizzare A.

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_4[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado al pi'$\breve{4}$ si considerino i sottospazi:

- $H = L(x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + x^4, 2x + 5x^2 - 3x^4)$
- $K = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] | p(x) \mathrm{e}' \mathrm{divisibileperx}^2 - \mathrm{x} - 2\}$,

(i) Determinare dimensione e una base per $H + K$ e per $H \cap K$.
(ii) Dato il polinomio $q(x) = -2 + 2x + 4x^4$ si verifichi che $q(x) \in H + K$ e lo si decomponga come somma di un vettore di H e di un vettore di K.
(iii) Tale decomposizione e' unica?

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si enunci il Teorema di Rouché-Capelli e si utilizzi il caso particolare dei sistemi lineari in tre variabili per discutere le possibili mutue posizioni di un piano e di una retta nello spazio affine.