Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
23 Settembre 2014

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

<u>Istruzioni</u>

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)
Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x.$$

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)
Si dimostri che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)}$$

è divergente.

ESERCIZIO 1.3 (15 punti)
Si consideri l'equazione differenziale ordinaria

$$\ddot{x} + x = \sin \omega t.$$

Si discuta per quali valori di $\omega \in \mathbb{R}$ i moti sono illimitati.

ESERCIZIO 1.4 (15 punti)
Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\mathrm{e}^x} - \sqrt{3+2x}}{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2 \sin x^2}.$$

<u>Esercizio 1.5</u> (25 punti)
Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale. Si consideri la funzione $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_a(x) = \frac{10^{x-a}}{(10^{x-a}+1)^2+1}.$$

(i) (6 punti) Si dica per quale $x \in \mathbb{R}$ f_a assume il suo massimo valore.
(ii) (6 punti) Si dimostri che $0 < f_a(x) < \frac{1}{4}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(iii) (6 punti) Si dimostri che per ogni λ appartenente all'intervallo

$$\left(0, \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}\right)$$

l'equazione in x $f_a(x) = \lambda$ ha sempre due soluzioni $x_1(\lambda)$ e $x_2(\lambda)$ distinte.
(iv) (7 punti) Si dica per quale $a \in \mathbb{R}$ tali soluzioni sono sempre di segno diverso (al variare di λ).

<u>Esercizio 1.6</u> (25 punti)
Dissertazione teorica.
(i) (5 punti) Si enunci la definizione di continuità e di differenziabilità per funzioni di più variabili.
(ii) (10 punti) Si dimostri che la funzione seguente

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è continua nell'origine.
(iii) (10 punti) Si dimostri che la funzione del punto (ii) è differenziabile nell'origine, e si calcoli il suo differenziale.

GRUPPO 2 (Geometria)

ESERCIZIO 2.1 (15 punti)
Sia $\mathbb{F}_p$ il campo con p elementi ($p \geq 2$ un numero primo) e sia $A := \mathbb{F}_p[X]$.
(i) Si dimostri che se $I \subseteq A$ è un ideale non nullo, l'anello quoziente A/I ha un numero finito di elementi.
(ii) Si stabilisca se due quozienti A/I e A/J con lo stesso numero di elementi sono sempre isomorfi.

ESERCIZIO 2.2 (15 punti)
Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Si dimostri che i seguenti due asserti sono equivalenti:
(1) $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.
(2) $f^2 = 0$ (dove $f^2 = f \cdot f$).

ESERCIZIO 2.3 (25 punti)
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[T]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile T sono dati i sottospazi

$$\mathcal{H} := \{p(T) \in \mathbb{R}_3[T] | p(-1) = p(1) = 0\},$$

$$\mathcal{K} := \langle T, T^2 + 1 \rangle.$$

(i) Si calcoli la dimensione e una base di $\mathcal{H}$.
(ii) Si calcoli la dimensione e una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$,
(iii) Si stabilisca se $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ è somma diretta di $\mathcal{H}$ e di $\mathcal{K}$.

ESERCIZIO 2.4 (15 punti)
Si riduca a forma canonica euclidea la seguente conica, la si studi e si scriva esplicitamente il cambiamento di riferimento usato:

$$X^2 + 2XY + Y^2 + X = 0$$

Esercizio 2.5 (25 punti)
Si studi l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & h \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui f è diagonalizzabile. Per il valore di h per cui f ammette l'autovalore 1 con molteplicità 2, si determini una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si enunci il Teorema di riduzione a forma canonica di una conica nel piano euclideo e si discutano i principali passi della sua dimostrazione: che cosa sono le forme canoniche; quali sono; come varia la risposta a seconda che il campo sia quello dei numeri reali o dei numeri complessi; perché è possibile la riduzione.