Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
23 Settembre 2015

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Si calcoli la lunghezza dell'arco della spirale di Archimede dato in coordinate polari da

$$r = a\theta,$$

dove $a > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1.2 (15 punti)
Si calcoli

$$\int_{B(0,r)} |z| \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

dove

$$B(0,r) = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

Esercizio 1.3 (15 punti)
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = 1 + x^3 - 3x^2 + 6x - \arctan 3x.$$

(i) (5 punti) Si dimostri che f è biunivoca.
(ii) (5 punti) Si discuta quanti zeri ha la funzione $f(x)$.
(iii) (5 punti) Si discuta se esistono zeri positivi.

Esercizio 1.4 (15 punti)
(i) Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} + 2tx = tx^3, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(ii) Si trovi la soluzione con dato iniziale $x(0) = x_0$ qualsiasi.

<u>ESERCIZIO 1.5</u> (25 punti)
(i) (10 punti) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e si indichi con f' la derivata di f. Si dimostri che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$|f(y) - f(x)| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|f'((1-t)x + ty)\| \cdot |x - y|,$$

dove $|\cdot|$ è la norma euclidea a $\|\cdot\|$ è la norma indotta sulle matrici.
(ii) (5 punti) Se $m = 1$, si dimostri che esiste $t \in (0, 1)$ tale che

$$f(y) - f(x) = f'((1-t)x + ty) \cdot (y - x).$$

(iii) (10 punti) Si trovi un controesempio al punto (ii) se $m > 1$.

<u>ESERCIZIO 1.6</u> (25 punti)
Dissertazione teorica.
(i) (10 punti) Si enunci il teorema della divergenza in due dimensioni.
(ii) (15 punti) Dato $p \in \mathbb{R}$, si calcoli il flusso del campo vettoriale $F(x, y) = (-y, x)$ attraverso il bordo della regione

$$A = \{(x, y) : y \leq 1 - x^2, \quad y \geq px\}.$$

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)

Sia G un gruppo finito di ordine pari $n = 2k$.

(i) Si dimostri che G ha un elemento di ordine 2.

Supponiamo poi che k sia dispari.

(ii) si dimostri che, se $g \in G$ ha ordine 2, l'applicazione $\mu_g : G \longrightarrow G,\ x \mapsto gx$ è una permutazione dispari sugli elementi di G;

(iii) usando (ii) e il teorema di Cayley, si mostri che G ha un sottogruppo normale di ordine k.

Esercizio 2.2 (15 punti)

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{13}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{13}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) \end{pmatrix}$$

si calcoli A^{131}.

Esercizio 2.3 (15 punti)

Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali diagonalizzabile, con autovalori tutti uguali a 1 o a -1. Si dimostri che

$$A^2 = I_n,$$

dove I_n è la matrice identità $n \times n$.

Esercizio 2.4 (15 punti)

Si riduca in forma canonica la conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$2XY - 2X + Y = 0$$

e se ne descrivano le proprietà.

Esercizio 2.5 (25 punti)
Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f((1,1)) = (3,-1,0), \qquad f((-1,1)) = (1,0,-1).$$

(i) Si trovi la matrice A che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Si determinino $\ker f$ e l'immagine di f.
(iii) Si determini $f^{-1}((2,h,-1))$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si descriva la procedura di Gram-Schmidt per ricavare da ogni base di uno spazio vettoriale con prodotto scalare una base ortonormale. Si applichi tale procedura per individuare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ definito da $W := \{(x,y,z) | x+y=z\}$.