Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
27 Settembre 2012

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Siano a e b due numeri complessi e si consideri il sistema di equazioni in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (az - b\bar{z})(bz - a\bar{z}) = 4, \\ z^2 - |z|^2 = 0. \end{cases}$$

Sotto quali condizioni su $a, b \in \mathbb{C}$ esiste almeno una soluzione $z \in \mathbb{C}$ del sistema?

Esercizio 1.2 (15 punti)
Si consideri la seguente successione, definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - x_n^3 \end{cases}$$

(i) (5 punti) Si dimostri per induzione che, se

$$a \in (0, 1),$$

allora

$$0 < x_{n+1} < x_n \qquad \forall n \geq 0.$$

(ii) (5 punti) Si dimostri che, se x_0 è come nel punto (i), allora la successione $\{x_n\}$ ammette limite.
(iii) (5 punti) Sempre nelle ipotesi del punto (i), si dimostri che il limite non può che essere zero.

Esercizio 1.3 (15 punti)
Si consideri l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$, dove

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Si dimostri che esiste ed è unica la soluzione e la si calcoli.

Esercizio 1.4 (15 punti)

(i) (5 punti) Si consideri la successione

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Si dimostri che la successione a_n è monotona crescente.

(ii) (5 punti) Si dimostri che

$$a_n \leq 1 \qquad \forall n \geq 1.$$

(iii) (5 punti) Si deduca dai punti (i) e (ii) che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

con $a \in (0,1]$.

Esercizio 1.5 (25 punti)

Si consideri la funzione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = x^{f_n(x)}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Si dimostri che

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \begin{cases} 0, & n \text{ dispari}, \\ 1, & n \text{ pari}. \end{cases}$$

Esercizio 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si consideri la sfera unità di $\mathbb{R}^n$: come si calcola il suo volume per n generico?

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)

Siano X un insieme e K un campo. Denotiamo con A l'anello delle funzioni su X a valori in K, cioè $A := \{f : X \longrightarrow K\}$. Sappiamo che A è un anello commutativo unitario rispetto alle operazioni definite puntualmente:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x),$$

per ogni $x \in X$.

Se $f \in A$, poniamo $Z(f) := \{x \in X; f(x) = 0\}$. Dimostrare che:

(i) f è invertibile in A se e soltanto se $Z(f) = \emptyset$;

(ii) se $|X| > 1$, ogni elemento che non è invertibile è uno zerodivisore;

(iii) f è idempotente, cioè $f = f^2$, se e soltanto se $f(x) = 1$ per ogni $x \in X \setminus Z(f)$;

(iv) ogni ideale principale di A è generato da un elemento idempotente.

Esercizio 2.2 (15 punti)

La traccia di una matrice $C = (c_{ij})$ è definita da $\operatorname{Tr} C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$. Dimostrare che se A e B sono matrici quadrate $n \times n$ si ha $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$.

Esercizio 2.3 (15 punti)

Ridurre in forma canonica euclidea e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$3X^2 + 2XY + 3Y^2 + 2X + 2Y - 17/2 = 0.$$

Esercizio 2.4 (15 punti)

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[X]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3, si consideri il sottoinsieme $V := \{p \in \mathbb{R}_3[X] | p(1) = p(-1) = 0\}$. Si dimostri che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[X]$ e se ne indichi una base.

Esercizio 2.5 (25 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che, rispetto alla base canonica, è associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} h-1 & h & 1-2h & h-1 \\ h & 1 & -1-h & h \\ h & 1 & -1-h & h \\ 1 & 1-h & h-2 & 1 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$. Trovare il valore di h per cui $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ e determinare gli autospazi di f nel caso in cui $h = 0$.

Esercizio 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si enunci il Teorema di Rouché-Capelli e si utilizzi il caso particolare dei sistemi lineari in tre variabili per discutere le possibili mutue posizioni di un piano e di una retta nello spazio affine.